DURÉE : 4 heures

On désigne par $[x]$ la partie entière du réel x.
Etant donnés un entier $q \geq 1$, des réels $r_1, \cdots, r_q$ strictement positifs et de somme > 1, des entiers $m_1, \cdots, m_q$ deux à deux distincts et supérieurs ou égaux à 2, on cherche à étudier le comportement de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par:

$$a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 1 \quad a_n = \sum_{j=1}^{q} r_j \, a_{[n/m_j]}.$$

Les trois premières parties du problème sont indépendantes entre elles.

I

Dans cette partie on étudie l'exemple: $q = 2, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 3, \quad m_1 = 3, \quad m_2 = 9.$

On pose, pour $p \geq 0$, $b_p = a_{3^p}$.

1. Déterminer explicitement b_p en fonction de p.
2. Montrer que, si $p \geq 0$ et $3^p \leq n < 3^{p+1}$, alors $a_n = b_p$.
3. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ est l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$ de $\mathbf{R}$.

II

On étudie, dans cette partie, quelques propriétés générales de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $a > 0$ tel que $\sum_{j=1}^{q} r_j \, m_j^{-a} = 1$.
2. (a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \geq 1 \qquad a_n \leq C n^a$.

   (b) Montrer $\forall n \geq 0 \qquad a_n \geq (n+1)^a$.

   (On pourra montrer et utiliser l'inégalité: $\forall n \geq 0 \qquad 1 + \left[\frac{n}{m_j}\right] \geq \frac{n+1}{m_j}$.)
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante et que, si on pose pour tout réel x positif ou nul $A(x) = a_{[x]}$, on a

$$0 \leq x < 1 \Longrightarrow A(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \geq 1 \quad A(x) = \sum_{j=1}^{q} r_j \, A(x/m_j).$$

(On pourra commencer par montrer que pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier $m \geq 1$

$$\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{m}\right].)$$

III

On établit dans cette partie un résultat auxiliaire général.

On désigne par $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ dont la restriction à tout intervalle $[0, T]$, $T > 0$, est continue par morceaux sur $[0, T]$.

On pose $\mathcal{E}_\infty = \{f \in \mathcal{E}; \sup_{t\geq 0} f(t) < +\infty\}$ et, pour $f \in \mathcal{E}_\infty$, $\|f\|_\infty = \sup_{t\geq 0} f(t)$.

On désigne par c le nombre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx$ (en réalité, $c = \pi$).

On pose

$$K(y) = \frac{1}{2c} \max\left(1 - \frac{|y|}{2}, 0\right)$$

Tournez la page S.V.P.

et, pour n entier strictement positif, $K_n(y) = K(y/n)$.

On pose enfin $\forall n \geq 1 \quad \forall x \in \mathbf{R} \qquad h_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} K_n(y)\, dy$

(où $i \in \mathbf{C}$ et $i^2 = -1$).

1. Calculer explicitement h_n pour tout $n \geq 1$ et en déduire que la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ possède les trois propriétés suivantes:

   i) h_n est continue et $\forall x \in \mathbf{R} \quad h_n(x) \geq 0$,

   ii) $\forall n \geq 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\, dx = 1$,

   iii) $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} h_n(x)\, dx = 1$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{E}_\infty$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ la fonction

$$F_n(x) = \int_0^{\infty} \varphi(t)\, h_n(x-t)\, dt$$

   est bien définie sur $\mathbf{R}$.

3. On suppose de plus qu'il existe des réels $l > 0$ et $a > 0$ tels que

   iv) $\forall n \geq 1 \quad \lim_{x\to+\infty} F_n(x) = l$,

   v) $t \longrightarrow \varphi(t)\, e^{at}$ est une fonction croissante sur $\mathbf{R}_+$.

   (a) Soit $x \in \mathbf{R}_+$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\varphi(x) \leq \frac{e^{2a\delta}}{\int_{-\delta}^{\delta} h_n(y)\, dy} F_n(x+\delta)$$

   (remarquer que $F_n(x+\delta) \geq \int_x^{x+2\delta} \varphi(t)\, h_n(x+\delta-t)\, dt$).

   (b) Soient x, δ tels que $x > 2\delta > 0$. Montrer que

$$\varphi(x) \geq e^{-2a\delta} \left[F_n(x-\delta) - \|\varphi\|_\infty \left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} h_n(y)\, dy \right) \right].$$

   (c) Montrer que $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = l$.

IV

On revient à l'étude de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$. On fait dans cette partie l'hypothèse qu'il existe un couple d'entiers (k, l) entre 1 et q tel que $\frac{\ln(m_k)}{\ln(m_l)}$ soit irrationnel. (La notation ln désigne le logarithme neperien.)

On conserve les notations de la partie II.

1. Montrer que pour tout y réel non nul

$$\sum_{j=1}^{q} r_j\, m_j^{-a-iy} \neq 1.$$

A SUIVRE

2. On pose

$$F(s) = \int_0^\infty A(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \int_1^\infty x^{-s-1}\,A(x)\,dx$$

où s désigne un nombre complexe. On désigne dans la suite par $\mathcal{R}s$ la partie réelle de s.

(a) Montrer que F est définie dans le demi-plan ouvert $\{s \in \mathbf{C};\, \mathcal{R}s > a\}$ et que, pour $\mathcal{R}s > a$,

$$F(s) = \frac{\sum_{j=1}^q r_j\,(1 - m_j^{-s})}{s\left(1 - \sum_{j=1}^q r_j\,m_j^{-s}\right)} = \frac{1}{s} + \frac{\left(\sum_{j=1}^q r_j\right) - 1}{s\left(1 - \sum_{j=1}^q r_j\,m_j^{-s}\right)}\,.$$

(b) Montrer qu'il existe un réel $l > 0$, que l'on déterminera en fonction de a, $(r_j)_{1\le j\le q}$ et $(m_j)_{1\le j\le q}$, tel que la fonction $F(s) - \frac{l}{s-a}$ se prolonge en une fonction G continue dans le demi-plan fermé $\{s \in \mathbf{C};\, \mathcal{R}s \ge a\}$.

On pose

$$\forall y \in \mathbf{R} \qquad g(y) = G(a + \mathrm{i}y) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbf{R}_+ \qquad \varphi(t) = A(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-at},$$

et on reprend les notations définies en tête de la partie **III**.

3. Montrer que φ appartient à $\mathcal{E}_\infty$ et que, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $y \in \mathbf{R}$,

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-(\epsilon+\mathrm{i}y)t}\,dt = l\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\epsilon+\mathrm{i}y)t}\,dt + G(a + \epsilon + \mathrm{i}y).$$

En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\epsilon t}\,h_n(x-t)\,dt = l\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\epsilon t}\,h_n(x-t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} G(a+\epsilon+\mathrm{i}y)\,K_n(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,dy.$$

(On pourra admettre sans démonstration la possibilité, dans la situation considérée, d'échanger deux signes d'intégration.)

4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \int_0^\infty \varphi(t)\,h_n(x-t)\,dt = l\int_{-\infty}^x h_n(s)\,ds + \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,K_n(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,dy,$$

et déduire alors de **III** que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = l.$$

(Pour ce dernier point on pourra admettre le résultat géneral suivant:
Si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ est une fonction continue et si u et v sont des réels avec $u < v$, alors

$$\lim_{x\to\infty} \int_u^v \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,f(y)\,dy = 0.)$$

5. Donner un équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.
En déduire, par exemple, que dans le cas particulier de la suite définie par

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \ge 1 \qquad a_n = a_{[n/2]} + a_{[n/3]} + a_{[n/6]},$$

a_n est équivalent, quand n tend vers l'infini, à $\frac{12}{\ln(432)}n$.

FIN